BANCO DE GUATEMALA
Documentos de Trabajo

CENTRAL BANK OF GUATEMALA
Working Papers

No. 51

DISTRIBUCIÓN Y PRONÓSTICO DE UNA SERIE NO-OBSERVABLE: EL CASO DEL PIB MENSUAL DE GUATEMALA*

Año 2001

Autor:
Víctor Manuel Guerrero Guzmán

*Trabajo ganador del 2do. lugar, reconocimiento otorgado por el Jurado Calificador del Certamen Permanente de Investigación sobre Temas de Interés para la Banca Central Dr. Manuel Noriega Morales, Edición XI

BANCO DE GUATEMALA

DISTRIBUCIÓN Y PRONÓSTICO DE UNA SERIE NO-OBSERVABLE: EL CASO DEL PIB MENSUAL DE GUATEMALA

Víctor Manuel Guerrero Guzmán *

RESUMEN

El problema de la distribución temporal de una serie de tiempo se presenta con frecuencia al realizar análisis de la coyuntura económica. El presente trabajo propone una solución a este problema, la cual se complementa con una versión recursiva de la misma y con un método para pronosticar la serie. Es decir, se obtiene primero una solución directa a la distribución, con la cual se estima, en una sola aplicación, toda una serie de valores pasados de la serie no-observada. La versión recursiva se usa entonces para estimar los valores del momento actual de la serie, mientras que el pronóstico permite estimar los valores futuros de la misma.

La metodología que se deriva de la solución, parte de un modelo estadístico que relaciona a la serie no observable con una serie de estimaciones preliminares y con otra serie de valores que representan agregados de la serie no-observable. Con la ayuda de ese modelo se puede aplicar un resultado teórico ya establecido previamente, el cual produce la fórmula del Estimador Lineal con Error Cuadrático Medio Mínimo de la serie no-observable. Sin embargo, para operacionalizar el resultado se requiere conocer el modelo para la serie de diferencias entre serie preliminar y serie no-observable, el cual puede obtenerse haciendo uso de un método también ya conocido. Por último, la existencia de la serie de estimaciones preliminares se justifica porque dicha serie puede obtenerse a partir de indicadores sintéticos. El caso del PIB mensual de Guatemala permite ejemplificar la aplicación de las metodologías para dar solución a un problema real, el cual dio origen a esta investigación.

1. Introducción

La carencia de información que representa el hecho de no tener datos con la frecuencia de observación deseada (digamos trimestrales o mensuales), de una variable económica tan relevante como es el Producto Interno Bruto (PIB) de un país, ha conducido a diversos estudiosos a proponer métodos para estimar esos datos a partir de las cifras anuales. Entre los primeros trabajos que aparecieron a este respecto se encuentra el de Friedman (1962), quien sugirió hacer uso de variables asociadas con la no-observada, para tratar de estimar esta última con base en datos observados. Sin embargo, su propuesta quedó incompleta, ya que no proporcionó un método para hacer que la serie resultante de su estimación cumpliera con las restricciones contables que debe satisfacer el PIB, como es que la suma de sus valores trimestrales den el dato anual, que sí es observable. Otros trabajos que sí se ocuparon de este último punto, pero no tuvieron en cuenta la existencia de variables relacionadas, son los de Lisman y Sandee (1964) y Cohen, Müller y Padberg (1971).

Los métodos de Chow y Lin (1971) y de Denton

* Doctor en Estadística. Departamento de Estadística. Instituto Tecnológico Autónomo de México -ITAM-.

(1971), han prevalecido hasta nuestros días como los más utilizados en la práctica, debido fundamentalmente a que sí toman en cuenta información relacionada con la serie por estimar y que la serie estimada resultante cumple con la restricción contable. No obstante, dichos métodos ponen poco énfasis en el hecho de que la característica más sobresaliente de una serie de tiempo es su estructura de autocorrelación, la cual se considera de manera subjetiva en tales métodos. En cambio, en los trabajos de Guerrero (1990) y de Wei y Stram (1990) el énfasis se vuelca sobre la inclusión de dicha estructura en la solución del problema. Desafortunadamente, estos dos últimos métodos no son totalmente aconsejables en la práctica, por razones que se indicarán posteriormente. Otros trabajos que se han ocupado del problema de la distribución, también denominado desagregación temporal, o conocido asimismo con otros nombres, son los de Hillmer y Trabelsi (1987), Chen, Cholette y Dagum (1997) y Nieto (1998).

La solución que aquí se presenta permite deducir un método de aplicación práctica relativamente fácil y reúne características deseables de métodos anteriores. De hecho: (a) hace uso de información proporcionada por variables relacionadas a través de una serie preliminar, (b) incluye la estructura de autocorrelación, a partir de datos observados (sin tener en cuenta la subjetividad del analista) y (c) realiza la desagregación de los datos anuales de manera óptima, en un sentido estadístico. El contenido de este artículo es el siguiente: la Sección 2 presenta el modelo estadístico que relaciona la serie preliminar con la serie no-observable, así como los supuestos que permiten deducir la solución. En la Sección 3 se obtiene la solución para la distribución directa, primero de manera teórica y después de forma operacionalizable. La distribución recursiva se ataca en la Sección 4, como una extensión de los resultados para la distribución directa. En la Sección 5 se deduce el método para pronosticar valores futuros de la serie no-observable, a partir de los resultados que se han obtenido previamente. Dado que la solución propuesta está sostenida fundamentalmente por la existencia de una serie preliminar, la construcción de esta serie se trata con detalle en la Sección 6. El caso de la distribución mensual del PIB de Guatemala, que aparece en la Sección 7, permite ilustrar con detalle la aplicación de la metodología de manera integral y con datos reales. Por último, la Sección 8 concluye con algunas recomendaciones finales.

2. Modelo estadístico

Considérese una serie de tiempo no-observable $\{Z_t\}$, para t = 1,..,mn, donde denota el número de periodos completos (digamos años) y es la frecuencia dentro de cada periodo (digamos trimestres o meses, en cuyo caso m = 4 ó m = 12). Asociada con dicha serie, se supone que existe otra serie $\{W_t\}$, cuyas observaciones constituyen estimaciones preliminares de los datos no-observables. La especificación que establece la liga entre estas dos series, se hace con el modelo $Z_t = W_t + S_t$, con $\{S_t\}$ un proceso estacionario no-observable. (2.1)

Dicho modelo se complementa con los siguientes supuestos.

Supuesto 1. Dada la serie $\{W_t\}$, las series $\{Z_t\}$ y $\{S_t\}$ no están correlacionadas, y tiene media cero, o sea

$E(Z_t S_{t'} | \{W_t\}) = 0$ para toda t y t' (2.2a)

y $E(S_t | \{W_t\}) = 0$ para toda t. (2.2b)

Supuesto 2. La estructura de comportamiento de la serie $\{S_t\}$ está dictada por el modelo Auto-Regresivo y de Promedios Móviles (ARMA)

$$\phi_S(B)S_t = \theta_S(B)e_t \qquad (2.3)$$

con polinomios en el operador de retraso B tal que para toda variable X y todo índice t. Dichos $\phi_S(B) = 1 - \phi_{S,1}B - \dots - \phi_{S,p}B^p$ y $\theta_S(B) = 1 + \theta_{S,1}B + \dots + \theta_{S,q}B^q$ polinomios se supone que no tienen factores comunes y que las raíces de $\phi_S(x) = 0$ y $\theta_S(x) = 0$ se encuentran fuera del circulo unitario, de tal manera que corresponden a un proceso estacionario e invertible. Por su lado, $\{e_t\}$ constituye un proceso de Ruido Blanco Gaussiano, con media cero y varianza σ_e^2.

Supuesto 3. La serie $\{W_t\}$ admite la representación Auto-Regresiva Integrada y de Promedios Móviles (ARIMA)

$$\phi_W(B)d(B)W_t = \theta_W(B)a_t \qquad (2.4)$$

donde d(B) es un operador diferencia que vuelve a $\{d(B)W_t\}$ una serie estacionaria. Mientras que $\phi_w(B)$ y $\theta_w(B)$ son los correspondientes polinomios autorregresivo (AR) y de promedios móviles (MA), cuyas raíces ese encuentran fuera del círculo unitario. El proceso $\{a_t\}$ es Ruido Blanco Gaussiano, con media cero, varianza σ_a^2 y no está correlacionado con $\{e_t\}$.

El modelo (2.3) se puede escribir de manera equivalente como $S_t = \psi_S(B)e_t$ (2.5)

donde $\psi_S(B) = 1 + \psi_{S,1}B + \psi_{S,2}B^2 + \ldots$ es el polinomio MA puro, que se obtiene de la relación $\psi_S(B)\phi_S(B) = \theta_S(B)$, igualando los coeficientes de las potencias de B. La expresión (2.5) permite a su vez escribir

$$\mathbf{S} = \Psi_S \mathbf{e} \qquad (2.6)$$

con $\mathbf{S} = (S_1,\ldots,S_{mn})'$ y $\mathbf{e} = (e_1,\ldots,e_{mn})'$, donde el apóstrofe indica transposición, y Ψ_S es la matriz de dimensión mn X mn que se obtiene a partir de los coeficientes $\psi_{S,1}, \psi_{S,2},\ldots$ como se indica a continuación

$$\Psi_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \psi_{S,1} & 1 & \ldots & 0 \\ \psi_{S,2} & \psi_{S,1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_{S,mn-1} & \psi_{S,mn-2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.7)$$

Para que (2.6) sea totalmente equivalente a (2.5), para t = 1,...,mn, se requiere suponer además que $e_t = 0$ para $t \le 0$, lo cual no implica pérdida de generalidad.

Por su lado, las observaciones agregadas de la serie no-observable forman la serie $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$, donde cada una de las observaciones se expresa como sigue

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} c_j Z_{m(i-1)+j} \quad \text{para } i = 1,\ldots,n \qquad (2.8)$$

donde las son constantes c_j's conocidas, definidas por el tipo de agregación. Por ejemplo, si la desagregación se refiere a distribuir los valores Y_i, cuando éstos representan flujos, entonces $\mathbf{c}' = (c_1,\ldots,c_m) = (1,\ldots,1)$. Si las Y_i son índices o flujos, anualizados, entonces la distribución hace uso de $\mathbf{c}' = (1/m,\ldots,1/m)$, y si son saldos entonces la desagregación corresponde a interpolar los valores, con $\mathbf{c}' = (0,0\ldots,0,1)$ ó $\mathbf{c}' = (1,0,\ldots,0)$. En lo que sigue, sólo se tratará el caso de la distribución y se usará este nombre como sinónimo de desagregación. Si ahora se define la matriz $C = I \otimes \mathbf{c}'$ con (el producto Kronecker, $\mathbf{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)'$ y $\mathbf{Z} = (Z_1,\ldots,Z_{mn})'$, entonces puede escribirse el conjunto de restricciones (2.8) como

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{Z} \qquad (2.9)$$

3. Distribución directa

3.1 Solución óptima

La expresión (2.9), junto con la (2.1) expresada en forma vectorial como $\mathbf{Z} = \mathbf{W} + \mathbf{S}$, con $\mathbf{W} = (W_1,\ldots,W_{mn})'$, permitirá hacer uso de la Regla de Combinación que se presenta en el Apéndice. Para ello, nótese que (2.2a) implica que $E(\mathbf{Z}\,V = \mathbf{W}) = \mathbf{W}$, es decir, W es el Mejor Estimador Lineal (MEL) de Z basado en V = W, donde, por un MEL se entiende un estimador con Error Cuadrático Medio (ECM) mínimo. Además, por (2.2b) se sabe que $E(\mathbf{S}\,\mathbf{W}) = 0$, mientras que (2.6) implica que $\Sigma_S = \sigma_e^2 \Psi_S \Psi_S'$, en consecuencia se obtiene el resultado que sigue.

Proposición 1. El MEL de Z, dados W y Y, está dado por

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{W} + A(\mathbf{Y} - C\mathbf{W}), \qquad (3.1)$$

con matriz de ECM

$$\mathrm{ECM}(\hat{\mathbf{Z}}) = \sigma_e^2 (I_{mn} - AC)\Psi_S \Psi_S' \qquad (3.2)$$

donde

$$A = \Psi_S \Psi_S' \, C'(C\Psi_S \Psi_S' C')^{-1} \qquad (3.3)$$

Las expresiones (3.1) a (3.3) proporcionan la solución teórica óptima al problema de la desagregación temporal, pero no es operativa todavía, porque los parámetros involucrados en Ψ, así como σ_e^2, son desconocidos. La forma en que puede estimarse, es a partir de la estimación de un modelo para las observaciones de la serie agregada, las cuales surgen al hacer

$$D = CS = CZ - CW = Y - CW. \qquad (3.4)$$

Es decir, la serie se supone que admite la representación ARMA

$$\phi_D(L)D_i = \theta_D(L)\varepsilon_i, \quad \text{para } i = 1,\dots,n \qquad (3.5)$$

con $\phi_D(L) = 1 - \phi_{D1}L - \dots - \phi_{DP}L^P$ y $\theta_D(L) = 1 + \theta_{D1}L + \dots + \theta_{DQ}L^Q$ los polinomios en el operador de retraso L, que actúa sobre una variable agregada. Cabe aclarar que el modelo (3.5) se considera ARMA, porque la agregación temporal de un proceso ARMA, en este caso el proceso $\{S_t\}$, produce otro proceso ARMA, pero con diferentes órdenes para los polinomios de retraso (a este respecto, veáse Engel, 1984).

Debido a que la serie $\{D_t\}$ se puede obtener a partir de los datos de $\{Y_t\}$ y $\{W_t\}$, el modelo (3.5) puede construirse mediante la aplicación de técnicas estándar para series de tiempo. Una vez hecho eso, puede utilizarse la metodología para «desagregar el modelo», propuesta por Wei y Stram (1990), la cual se resume a continuación. En el supuesto de que no hay periodicidad oculta de orden m en la serie desagregada y que el modelo ARMA(P,Q) para la serie agregada es tal que $Q \le P + 1$, entonces puede obtenerse el modelo para la serie desagregada como sigue:

a) Factorícese el polinomio AR del modelo agregado, en función de sus raíces r_i

$$\phi_D(L) = \prod_{i=1}^{P}(1 - r_i L) \qquad (3.6)$$

Si algunas de las raíces reales de $\phi_D(L) = 0$ son negativas y m es un número par, entonces deténgase el procedimiento, porque no se podrá desagregar el modelo. De no ser así, el polinomio para el modelo desagregado será de orden p = P, con

$$\phi_S(B) = \prod_{i=1}^{P}\left(1 - r_i^{1/m}B\right) \qquad (3.7)$$

b) Supóngase que el orden del polinomio MA es q = p + 1. Entonces, a partir de las autocovarianzas de la serie agregada $\gamma_D(k)$, para k = 0,..., p + 1, se derivan las autocovarianzas de la serie desagregada $\gamma_S(k)$'s resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\Gamma(S, p+1) = T^{-1}\Gamma(D, p+1) \qquad (3.8)$$

donde $\Gamma(X, j)$ es el vector de autocovarianzas de la serie $\{X_t\}$, para los retrasos 0 a j, y T es la matriz

$$T = \begin{pmatrix} A_m^0(1) & A_2H \\ 0 & A_4H \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

con $A_m^0(1)$, A_2, A_4 y H definidas en el artículo de Wei y Stram (1990).

c) Obténganse los valores estimados $\hat{\sigma}_e^2$ de los parámetros MA, así como el de la varianza estimada, mediante sus relaciones con las autocovarianzas $\gamma_S(k)$ y los parámetros AR que se obtuvieron en el paso (a). Los parámetros estimados del polinomio MA, surgen de ecuaciones lineales que producen soluciones múltiples, por ello deben elegirse los que satisfagan las condiciones de invertibilidad.

Los pasos anteriores sirven básicamente para determinar la estructura dinámica que debe seguir la serie desagregada. Adicionalmente, al calcular los parámetros estimados de la parte MA, se obtiene también una estimación de la varianza σ_e^2. Sin embargo, dicho estimador no tiene en cuenta la longitud de la serie desagregada, ni la corrección por grados de libertad que debe aplicarse por el hecho de que dicha serie debe cumplir con las restricciones impuestas por los datos agregados. Para subsanar estas deficiencias, se sugiere utilizar el estimador propuesto por Nieto (1998), el cual se deduce de (2.6). O sea, com $\hat{S} = \Psi_S\hat{e}$, por (3.1) se llega a

$$\hat{\mathbf{e}} = \Psi_S^{-1}\left(\hat{\mathbf{Z}} - \mathbf{W}\right) = \Psi_S^{-1} AC\Psi_S \mathbf{e} \qquad (3.10)$$

Así, al sustituir a (3.3) en (3.10), se obtiene

$$\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}'\Psi'_S C'\left(C\Psi_S\Psi'_S C'\right)^{-1} C\Psi_S \mathbf{e}$$
$$= \mathrm{tr}\left[\mathbf{e}'\Psi'_S C'\left(C\Psi_S\Psi'_S C'\right)^{-1} C\Psi_S \mathbf{e}\right], \qquad (3.11)$$

donde tr(X) denota la traza de la matriz X y la segunda igualdad surge del hecho de que $\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}}$ es un escalar. Por lo tanto, por propiedades de la traza se llega a

$$E\left(\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}}\right) = E\left\{\mathrm{tr}[\Psi'_S C'\left(C\Psi_S\Psi'_S C'\right)^{-1} C\Psi_S \mathbf{e}\mathbf{e}']\right\}$$
$$= \sigma_e^2 \mathrm{tr}\left[\Psi'_S C'\left(C\Psi_S\Psi'_S C'\right)^{-1} C\Psi_S\right] \qquad (3.12)$$

De esta relación se deduce que un estimador de σ_e^2, que tiene en cuenta la estimación de parámetros y las restricciones impuestas por C, es

$$\hat{\sigma}_e^2 = \hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} / \mathrm{tr}\left[\hat{\Psi}'_S C'\left(C\hat{\Psi}_S\hat{\Psi}'_S C'\right)^{-1} C\hat{\Psi}_S\right] \qquad (3.13)$$

3.2 Validación del método

El supuesto de que $\{W_t\}$ constituye una serie de estimaciones preliminares de $\{Z_t\}$, puede validarse empíricamente con una prueba de compatibilidad entre estas dos series. Como $\{Z_t\}$ no es observable, el contraste puede realizarse con los valores observados de CW y los de CZ = Y. Esto es, ya que

$$\mathbf{Y} - C\mathbf{W} = C\Psi_S \mathbf{e} \sim N\left(\mathbf{0}, \sigma_e^2 C\Psi_S\Psi'_S C'\right) \qquad (3.14)$$

entonces un estadístico de prueba para la hipótesis nula $H_0 : C(\mathbf{Z} - \mathbf{W}) = \mathbf{0}$ está dado por

$$K = \left(\mathbf{Y} - C\mathbf{W}\right)'\left(C\hat{\Psi}_S\hat{\Psi}'_S C'\right)^{-1}\left(\mathbf{Y} - C\mathbf{W}\right) / \hat{\sigma}_e^2 \qquad (3.15)$$

cuya distribución asintótica, contra la cual se debe comparar su valor, es una Ji-cuadrada con n grados de libertad.

Otra verificación que podría parecer razonable a simple vista, es la de que el modelo que se haya deducido para la serie $\{S_t\}$ proporcione una representación adecuada para la serie estimada $\{\hat{S}_t\}$. Desafortunadamente esto no tiene por qué ocurrir así, y la razón es que, mientras la serie $\{e_t\}$ que aparece en (2.5) es Ruido Blanco, la serie $\{\hat{e}_t\}$ involucrada en la representación estimada, $\hat{S}_t = \Psi_S(B)\hat{e}_t$, no lo es. De hecho, al considerar el vector $\hat{\mathbf{e}}$ de (3.10) se puede observar que sus elementos son dependientes linealmente, pues se obtiene como combinación lineal de los elementos de $\hat{\mathbf{Z}} - \mathbf{W}$, en donde $\hat{\mathbf{Z}}$ satisface las restricciones lineales impuestas por (2.9), de forma tal que $C \bullet ECM(\hat{\mathbf{Z}}) = 0$.

3.3 Comparación con otros métodos disponibles

Como se indicó en la introducción, el método que aquí se propone no es el único que actualmente pudiera emplearse, pero sí tiene características que lo hacen superior a los otros. A continuación se exponen los argumentos que soportan esta afirmación, haciendo referencia explicita a los siguientes métodos existentes: el de Chow y Lin (1971), el de Denton (1971), el de Hillmer y Trabelsi (1987), el de Guerrero (1990) el de Chen, Cholette y Dagum (1997) y el de Nieto (1998). Los dos primeros se consideran porque son los más comúnmente aplicados en la práctica, mientras que los otros se incluyen porque, a juicio del presente autor, tienen mayor validez estadística que otras propuestas disponibles.

El método propuesto por Chow y Lin (1971) parte de la idea de que el vector Z se puede escribir en la forma del modelo lineal

$$\mathbf{Z} = X\beta + \varepsilon \qquad (3.16)$$

donde X es una matriz de observaciones de G variables supuestamente relacionadas con Z y (es un vector aleatorio que cumple con E(()=0 y Cov(()=V. Con base en (3.16), Chow y Lin obtuvieron un resultado similar a la Proposición 1 del presente artículo, pero que permite estimar conjuntamente a Z y (, de tal manera que se cumpla con la restricción impuesta por Y. Los resultados de Chow y Lin son

$$\hat{\mathbf{Z}}_{Ch-L} = X\hat{\beta} + VC'(CVC')^{-1}(\mathbf{Y} - CX\hat{\beta}) \qquad (3.17)$$

y $$\hat{\beta} = \left[X'C(CVC')^{-1}CX\right]^{-1} X'C'(CVC')^{-1}\mathbf{Y} \qquad (3.18)$$

con $\mathrm{ECM}(\hat{Z}_{Ch-L}) = [X - VC'(CVC')^{-1}CX][X'C'(CVC')^{-1}CX]^{-1}\cdot$
$\times[X'-X'C'(CVC')^{-1}CV] + [V - VC'(CVC')^{-1}CV]$ (3.19)

De esta forma, al comparar estos resultados con las expresiones (3.1) a (3.3), se aprecia que $\hat{\mathbf{Z}}$ y $\hat{\mathbf{Z}}_{Ch-L}$ coinciden cuando $\mathbf{W} = X\hat{\beta}$ y $\sigma_e^2\Psi_S\Psi'_S = V$, es decir, cuando la estimación preliminar se obtiene del modelo (3.16) y la matriz V se postula correctamente, en el sentido de que coincide con la matriz de varianza del vector S. Este último aspecto es el que vuelve subjetiva la aplicación del método de Chow y Lin, ya que V tiene que ser postulada por el analista sin base en datos observados. Adicionalmente, es de interés notar que si V se postula correctamente, entonces (3.19) se convierte en

$$\mathrm{ECM}(\hat{Z}_{Ch-L}) = \sigma_e^2(I_{mn} - AC)\Psi_S\Psi'_S +$$
$$\sigma_e^2(I_{mn} - AC)X[X'C'(C\Psi_S\Psi'_S C')^{-1}CX]^{-1}X'(I_{mn} - AC)' \quad (3.20)$$

donde el primer elemento de la suma brinda $\mathrm{ECM}(\hat{\mathbf{Z}})$ y el segundo sumando mide la variabilidad asociada con la discrepancia entre $\hat{\mathbf{Z}}_{Ch-L}$ y $\hat{\mathbf{Z}}$. La cual se debe a que $\hat{\mathbf{Z}}$ se obtiene con la condición de que $\mathbf{W} = X\beta$ ya se conoce, mientras que $\hat{\mathbf{Z}}_{Ch-L}$ y $\hat{\beta}$ se estiman simultáneamente.

En la práctica conviene estimar primero W y suponerlo conocido de ahí en adelante, pues eso reduce la variabilidad asociada con la estimación de Z. De hecho, eso es lo que hace el procedimiento de Denton (1971), el cual surge al resolver el siguiente problema de minimización cuadrática

$$min[(\hat{\mathbf{Z}}_D - \mathbf{W})'P(\hat{\mathbf{Z}}_D - \mathbf{W})] \text{ sujeto a } \mathbf{Y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{Z}}_D \quad (3.21)$$

en donde W se supone un vector conocido y P es una matriz de constantes definida como $P = \Delta'\Delta$, con Δ una matriz cuadrada de penalización, que debe ser especificada por el analista. Comúnmente la penalización se impone con una función del tipo

$$p(\hat{\mathbf{Z}}_D, \mathbf{W}) = \sum_{t=1}^{mn}[(1 - B)(\hat{Z}_{D,t} - W_t)]^2 \quad (3.22)$$

lo cual da origen a una matriz Δ triangular inferior con 1's en la diagonal principal, -1's en la subdiagonal inmediatamente inferior a la diagonal principal y 0's en todo lo demás. La solución del problema planteado, que se obtiene por minimización Lagrangeana, es

$$\hat{\mathbf{Z}}_D = \mathbf{W} + P^{-1}C'(CP^{-1}C')^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{CW}). \quad (3.23)$$

Puede verificarse que este estimador es un caso especial de la expresión (3.1), con $P^{-1} = \sigma_e^2\Psi_S\Psi'_S$. De esta manera se aprecia que la matriz juega el papel de la matriz V en el método de Chow y Lin (1971) y que, al igual que V, se deja a ser postulada por el analista de manera subjetiva, en particular sin tener en cuenta que debe estar asociada a la estructura de autocorrelación de una serie de tiempo.

Otro procedimiento que brinda un estimador de naturaleza similar a (3.1), es el propuesto por Hillmer y Trabelsi (1987). Los supuestos que fundamentan a este procedimiento son los siguientes. Los vectores Y y W se relacionan con Z a través de las expresiones

$$Y=CZ+u \quad y \quad W=Z+S \quad (3.24)$$

con $\mathbf{u}$ un vector aleatorio distribuído como $N(\mathbf{0}, \Sigma_u)$ y S otro vector aleatorio, independiente de Z y $\mathbf{u}$, distribuido como $N(\mathbf{0}, \Sigma_S)$. Entonces, mediante un argumento de Estadística Bayesiana, Hillmer y Trabelsi obtuvieron la solución óptima que combina la información disponible. Dicha solución, en el caso en que la distribución a priori sea no-informativa y no exista incertidumbre en las restricciones impuestas por Y (o sea, $\Sigma_u = 0$) produce las siguientes expresiones (véase la deducción de estos resultados en Guerrero, 1990)

$$\hat{\mathbf{Z}}_{H-T} = \mathbf{W} + \Sigma_S C'(C\Sigma_S C')^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{CW}) \quad (3.25)$$

Esta expresión es idéntica a la (3.1) - (3.3), si se elige la matriz $\Sigma_S = \sigma_e^2\Psi_S\Psi_S'$. Nuevamente, es la elección de esta matriz la que presenta dificultades en la práctica. Una manera factible de realizar esta selección es la que propusieron Chen, Cholette y Dagum (1997), la cual resulta demasiado complicada para ser de uso práctico.

Por su lado, Guerrero (1990) propuso también un enfoque para llevar a cabo la desagregación de una serie. La solución a la que se llega en este caso puede resumirse en

$$\hat{\mathbf{Z}}_G = \mathbf{W} + \Psi_W P \Psi'_W C'(C\Psi_W P\Psi'_W C')^{-1}(\mathbf{Y} - C\mathbf{W}) \quad (3.26)$$

donde Ψ_W es una matriz que se forma con las ponderaciones MA del modelo ARIMA para la serie $\{W_t\}$ y P es una matriz positiva definida, que se define implícitamente al escribir las ecuaciones (2.20) - (2.21) de Guerrero (1990) como

$$\mathbf{S} = \Psi_W \mathbf{v} \quad \text{con } E(\mathbf{v}\,\mathbf{W} = \mathbf{0}) \text{ y } E(\mathbf{v}\mathbf{v}'\,\mathbf{W}) = \sigma^2 P \, (3.27)$$

de esta forma , por (2.6) se sigue entonces que

$$\sigma_e^2 \Psi_S \Psi_S' = \sigma^2 \Psi_W P \Psi'_W \quad (3.28)$$

y, por lo tanto, (3.26) equivale a (3.1) - (3.3). La diferencia fundamental entre el método de 1990 y el que ahora se propone, radica en la forma de estimar (3.28), que en la nueva propuesta tiene mayor solidez, por los supuestos que la soportan.

Finalmente, el método propuesto por Nieto (1998) parte del modelo (2.1), pero se basa en el supuesto de que las partes estocásticas (es decir, sin efectos deterministas) de las series $\{Z_t\}$ y $\{W_t\}$ se pueden modelar como el mismo proceso AR, excepto por tener distintas varianzas en los respectivos procesos de Ruido Blanco. Este supuesto no es válido, ya que la suma de un proceso AR con otro proceso (que incluso pudiera ser Ruido Blanco), da por resultado un proceso ARMA, por lo cual $\{Z_t\}$ y $\{W_t\}$ no pueden compartir el mismo modelo AR. La expresión a la que llega Nieto puede escribirse en la notación del presente artículo como

$$\hat{\mathbf{Z}}_N = \mathbf{W} + \Psi_W \Psi'_W C'(C\Psi_W \Psi'_W C')^{-1}(\mathbf{Y} - C\mathbf{W}) \quad (3.29)$$

en donde se aprecia que es la estructura dinámica de la serie $\{W_t\}$ y no la de las diferencias $\{S_t\}$ la que realmente se usa, lo cual no es correcto.

4. Distribución recursiva

Lo que se desea estimar con este enfoque, es el vector $\mathbf{Z}^\tau = (Z_{m(\tau-1)+1}, \ldots, Z_{m\tau})$, para $\tau = n+1, n+2, \ldots$. En este caso se presupone que ya se conocen los valores de $\mathbf{Z}^1, \mathbf{Z}^2, \ldots, \mathbf{Z}^n, \mathbf{Z}^{n+1}, \ldots, \mathbf{Z}^{\tau-1}$, o sea, de $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^{n+1}, \ldots, \mathbf{Z}^{\tau-1}$. Desde luego, estos vectores no son observables, pero sí son estimables, de hecho Z se puede estimar según se indicó en la sección anterior y $\mathbf{Z}^{n+1}$ a $\mathbf{Z}^{\tau-1}$ según se muestra en esta sección. También se hará uso de $\mathbf{W}, \mathbf{W}^{n+1}, \ldots, \mathbf{W}^{\tau-1}$ y $\mathbf{W}^\tau$ (vectores definidos en analogía con los correspondientes $\mathbf{Z}$'s) al igual que del valor agregado

$$Y_\tau = \mathbf{c}'\mathbf{Z}^\tau \quad (4.1)$$

Siguiendo el argumento de Guerrero y Martínez (1995), conviene reexpresar a (2.6) en función de los parámetros AR y MA del modelo (2.3) como sigue

$$\Phi_S \mathbf{S} = \Theta_S \mathbf{e} \quad (4.2)$$

donde
$$\Phi_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{S,1} & 1 & . & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{S,2} & -\phi_{S,1} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ -\phi_{S,p} & -\phi_{S,p-1} & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_{S,p} & . & -\phi_{S,1} & 1 & 0 \\ & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \Theta_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{S,1} & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{S,2} & \theta_{S,1} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ \theta_{S,q} & \theta_{S,q} & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{S,q} & & \theta_{S,1} & 1 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4.3)

la cual es equivalente a (2.5), pues para S_t=O para t≤O , ya que se supuso anteriormente que $e_t = 0$ para $t \leq 0$. La ventaja de usar estas matrices en lugar de las Ψ_S, consiste en que sólo se requiere utilizar los p + q parámetros AR y MA originales del modelo, en lugar de las ponderaciones Ψ_S. Esta ventaja será más clara posteriormente, al obtener la fórmula para la distribución de los valores agregados, ya que de no usar las matrices (4.3) aparecerían unas sumas infinitas. Una extensión inmediata de (4.2) permite escribir

$$\begin{pmatrix} & \Phi_S & & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ & \ldots & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & & \Phi_{S,n} & \Phi_{S,n-1} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & & 0 & 0 & \ldots & \Phi_{S,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ - \\ \ldots \\ \mathbf{S}^{\tau-1} \\ \mathbf{S}^\tau \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Theta_S & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ & \dots & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 0 & & \Theta_{S,n} & \Theta_{S,n-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & \dots & \Theta_{S-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ - \\ \dots \\ \mathbf{e}^{\tau-1} \\ \mathbf{e}^{\tau} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

donde los vectores $\mathbf{e}$'s se definen similarmente a los $\mathbf{Z}$'s y las matrices $\Phi_{S,i}$ y $\Theta_{S,i}$, para i = 1,...,n, son de dimensión m X m y están dadas por

$$\Phi_{S,i} = \begin{pmatrix} -\phi_{S,m(i-1)} & -\phi_{S,m(i-1)-1} & \dots & -\phi_{S,m(i-2)+1} \\ -\phi_{S,m(i-1)+1} & -\phi_{S,m(i-1)} & \dots & -\phi_{S,m(i-2)+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\phi_{S,mi-1} & -\phi_{S,mi-2} & \dots & -\phi_{S,m(i-1)} \end{pmatrix} \quad (4.5a)$$

y

$$\Theta_{S,i} = \begin{pmatrix} \theta_{S,m(i-1)} & \theta_{S,m(i-1)-1} & \dots & \theta_{S,m(i-2)+1} \\ \theta_{S,m(i-1)+1} & \theta_{S,m(i-1)} & \dots & \theta_{S,m(i-2)+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{S,mi-1} & \theta_{S,mi-2} & \dots & \theta_{S,m(i-1)} \end{pmatrix} \quad (4.5b)$$

con $-\phi_{S,0} = \theta_{S,0} = 1$, $\phi_{S,j} = \theta_{S,j} = 0$ para $j < 0$, $\phi_{S,j} = 0$ para j>p y $\theta_{S,j} = 0$ para j>q. Nótese que si el índice i es tal que $m,(i-1) \le p < mi$ entonces $\Phi_{S,i} = \dots = \Phi_{S,n} = 0$ y si $m(i-1) \le q < mi$, entonces $\Theta_{S,i} = \dots = \Theta_{S,n} = 0$.

Con la notación anterior, la expresión (3.6) de Guerrero y Martínez (1995) produce el siguiente resultado.

Proposición 2. El MEL de $\mathbf{Z}^{\tau}$, dados $\hat{\mathbf{Z}}^{\tau-j}$ y $\mathbf{W}^{\tau-j}$, para $j = 1,\dots,\tau-1$; $\mathbf{e}^{\tau-h}$, para $h = 1,\dots,\tau-1$; $\mathbf{W}^{\tau}$ y, es

$$\hat{\mathbf{Z}}^{\tau} = (\mathrm{I}_m - \mathbf{A}^*\mathbf{c}')\left\{\mathbf{W}^{\tau} - \Phi_{S,1}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{[p/m]} \Phi_{S,j+1}(\hat{\mathbf{Z}}^{\tau-j} - \mathbf{W}^{\tau-j}) - \sum_{h=1}^{[q/m]} \Theta_{S,h+1}\mathbf{e}^{\tau-h}\right]\right\} + \mathbf{A}^* Y_{\tau} \quad (4.6)$$

donde [x] denota a la función que elige la parte entera del número x, y la suma involucrada es cero cuando el límite superior de la suma es cero. Además, la matriz de ECM está dada por

$$\mathrm{ECM}(\hat{\mathbf{Z}}^{\tau}) = \sigma_e^2(\mathrm{I}_m - \mathbf{A}^*\mathbf{c}')\Phi_{S,1}^{-1}\Theta_{S,1}\Theta'_{S,1}\Phi'^{-1}_{S,1} \quad (4.7)$$

donde

$$\mathbf{A}^* = \Phi_{S,1}^{-1}\Theta_{S,1}\Theta'_{S,1}\Phi'^{-1}_{S}\mathbf{c}(\mathbf{c}'\Phi_{S,1}^{-1}\Theta_{S,1}\Theta'^{-1}_{S,1}\Phi'^{-1}_{S,1}\mathbf{c})^{-1} \quad (4.8)$$

Por supuesto, las fórmulas anteriores son útiles una vez que los parámetros se sustituyen por sus estimaciones. Cabe hacer notar que la precisión en la estimación, medida con el ECM (4.7), no depende de t, por lo que permanece constante para todos los periodos que se distribuyan de manera recursiva. Esto es muy práctico y puede ser razonable en algunos casos, pero en los que no sea así, convendría utilizar el estimador recursivo de σ_e^2 que se sugiere en la expresión (3.17) del artículo de Guerrero y Martínez. Por otro lado, el estadístico de prueba para validar la compatibilidad de $\mathbf{W}^{\tau}$ y $\mathbf{Z}^{\tau}$ en este caso, es

$$K = (Y_{\tau} - \mathbf{c}'\overline{\mathbf{W}}^{\tau})^2 / (\hat{\sigma}_e^2\mathbf{c}'\hat{\Phi}_{S,1}^{-1}\hat{\Theta}_{S,1}\hat{\Theta}'_{S-1}\hat{\Phi}'^{-1}_{S,1}\mathbf{c}) \quad (4.9)$$

con

$$\overline{\mathbf{W}}^{\tau} = \mathbf{W}^{\tau} - \hat{\Phi}_{S,1}^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{[p/m]} \hat{\Phi}_{S,j+1}(\hat{\mathbf{Z}}^{\tau-j} - \mathbf{W}^{\tau-j}) - \sum_{h=1}^{[q/m]} \hat{\Theta}_{S,h+1}\hat{\mathbf{e}}^{\tau-h}\right\} \quad (4.10)$$

el cual debe compararse con una distribución Ji-cuadrada con 1 grado de libertad. En (4.6) y (4.10) se hace uso del error estimado, dado por

$$\hat{\mathbf{e}}^{\tau} = \hat{\Theta}_{S,1}^{-1}\left[\sum_{j=0}^{[p/m]} \hat{\Phi}_{S,j+1}(\hat{\mathbf{Z}}^{\tau-j} - \mathbf{W}^{\tau-j}) - \sum_{h=1}^{[q/m]} \hat{\Theta}_{S,h+1}\hat{\mathbf{e}}^{\tau-h}\right] \quad (4.11)$$

Conviene subrayar el hecho de que el enfoque recursivo se usa para estimar la serie por cada periodo completo (digamos un año) según se van observando los valores agregados de $\{Y_t\}$. Los valores desagregados previamente no se ven afectados en absoluto con la desagregación recursiva, mientras que al usar el enfoque directo sí cambiarían los valores que ya se hubieran desagregado con anterioridad. Esta característica, aunada a la eficiencia computacional del método recursivo, hace que este método se considere como complementario, más que competidor, del método directo. En realidad, la recursión es altamente conveniente para estimar los valores del momento presente de la serie, mientras que el método directo es adecuado para estimar la serie de observaciones del pasado. En cambio, la sección siguiente cubre la necesidad de información acerca del futuro de la variable.

5. Pronóstico de valores desagregados futuros

El problema que aquí se considera es el pronóstico del vector $\mathbf{Z}_F = (Z_{mN+1},\ldots,Z_{mN+H})'$, con $mN \geq mn$ un número de observaciones previamente estimadas y $H \geq 1$ el horizonte de pronóstico. Este problema difiere del de desagregación, en tanto que ya no se suponen conocidos los valores de la serie $\{Y_i\}$ para $i > N$, pero sí se supondrán disponibles los valores de W y S, aunque este último deberá estimarse. En lo que sigue se consideran dos situaciones que dependen del número de valores de la serie $\{W_t\}$ que se conozcan para el horizonte de pronóstico. Estas son: (1) cuando no hay observaciones preliminares para t>mN y (2) cuando existen las observaciones $W_{mN+1},\ldots,W_{mN+\eta}$, con $1 \leq \eta \leq H$.

Para el primer caso, se escribirá el pronóstico $\hat{\mathbf{Z}}_F^{(1)} = (\hat{Z}_{mN+1}^{(1)},\ldots,\hat{Z}_{mN+H}^{(1)})'$ y, a partir de (2.1), se sigue que $\hat{Z}_{mN+h}^{(1)} = \hat{W}_{mN+h} + \hat{S}_{mN+h}$ para $h = 1,\ldots, H$ (5.1)

con $\hat{W}_{mN+h}$ y $\hat{S}_{mN+h}$ obtenibles a partir de sus correspondientes modelos, (2.4) y (2.3), respectivamente. Esto es, los pronósticos con ECM mínimo satisfacen

$$\phi_W(B)d(B)\hat{W}_{mN+h} = \theta_W(B)\hat{a}_{mN+h} \qquad (5.2a)$$

y $$\phi_S(B)\hat{S}_{mN+h} = \theta_S(B)\hat{e}_{mN+h} \qquad (5.2b)$$

con $\hat{W}_{mN+h-j} = W_{mN+h-j}$ y $\hat{S}_{mN+h-j} = S_{mN+h-j}$ si $j \geq h$, y $\hat{a}_{mN+h} = \hat{e}_{mN+h} = 0$ para . Por otro lado, ya que

$$W_{mN+h} - \hat{W}_{mN+h} = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_{W,j} a_{mN+h-j} \qquad (5.3a)$$

y $$S_{mN+h} - \hat{S}_{mN+h} = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_{S,j} e_{mN+h-j} \qquad (5.3b)$$

con las ponderaciones ψ_W's que surgen de la relación $\psi_W(B)\phi_W(B)d(B) = \theta_W(B)$ y las ψ_S's del modelo (2.5).

Las expresiones (5.3) se resumen como

$$\mathbf{W}_F - \hat{\mathbf{W}}_F = \Psi_W^{(H)}\mathbf{a}_F \ (5.4a) \text{ y}$$

$$\mathbf{S}_F - \hat{\mathbf{S}}_F = \Psi_S^{(H)}\mathbf{e}_F \qquad (5.4b)$$

donde los vectores con el subíndice F se definen análogamente a $\mathbf{Z}_F$, y $\Psi_W^{(H)}$ es la matriz triangular inferior con elementos $1, \psi_{W,1},\ldots,\psi_{W,H-1}$ en su primera columna, con $0, 1, \psi_{W,1},\ldots,\psi_{W,H-2}$ en su segunda columna y así sucesivamente, mientras que $\Psi_S^{(H)}$ se define de modo análogo a $\Psi_W^{(H)}$. Como resultado de las expresiones (5.4), se llega a

$$\mathbf{Z}_F - \hat{\mathbf{Z}}_F^{(1)} = \mathbf{W}_F + \mathbf{S}_F - \hat{\mathbf{W}}_F - \hat{\mathbf{S}}_F = \Psi_W^{(H)}\mathbf{a}_F + \Psi_S^{(H)}\mathbf{e}_F \quad (5.5)$$

de tal forma que

$$\mathrm{ECM}(\hat{\mathbf{Z}}_F^{(1)}) = \mathrm{Cov}\left[\begin{pmatrix}\Psi_W^{(H)} & \Psi_S^{(H)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}_F \\ \mathbf{e}_F\end{pmatrix}\right] = \sigma_a^2\Psi_W^{(H)}\Psi_W^{(H)\prime} + \sigma_e^2\Psi_S^{(H)}\Psi_S^{(H)\prime}$$

(5.6)

El caso (2) será tratado de manera similar al anterior, sólo que ahora se tiene

$$\hat{Z}_{mN+h}^{(2)} = \begin{cases} W_{mN+h} + \hat{S}_{mN+h} & \text{si } h = 1,\ldots,\eta \\ \hat{W}_{mN+h} + \hat{S}_{mN+h} & \text{si } h = \eta+1,\ldots,H \end{cases} \qquad (5.7)$$

con $\hat{W}_{mN+h}$ y $\hat{S}_{mN+h}$ calculados a partir de (5.2a), con las condiciones $\hat{W}_{mN+h-j} = W_{mN+h-j}$ si $j \geq h - \eta$ y $\hat{S}_{mN+h-j} = S_{mN+h-j}$ si $j \geq h$. Así se obtiene

$$Z_{mN+h} - \hat{Z}_{mN+h}^{(2)} = \begin{cases} S_{mN+h} - \hat{S}_{mN+h} & \text{si } h = 1,\ldots,\eta \\ \text{[illegible]} \end{cases} \qquad (5.8)$$

de donde se sigue que

$$\mathbf{Z}_F - \hat{\mathbf{Z}}_F^{(2)} = \begin{pmatrix} e_{mN+1} \\ \cdots \\ \sum_{j=0}^{\eta-1} \psi_{S,j} e_{mN+\eta-j} \\ a_{mN+\eta+1} + \sum_{j=0}^{\eta} \psi_{S,j} e_{mN+\eta+1-j} \\ \cdots \\ \sum_{j=0}^{H-\eta-1} \psi_{W,j} a_{mN+H-j} + \sum_{j=0}^{H-1} \psi_{S,j} e_{mN+H-j} \end{pmatrix} = \Psi_S^{(H)} \mathbf{e}_F + \begin{pmatrix} 0_\eta & 0 \\ 0 & \Psi_W^{(H-\eta)} \end{pmatrix} \mathbf{a}_F \tag{5.9}$$

con 0_η una matriz de ceros, de dimensión . Por consiguiente, la matriz de ECM del vector de pronósticos es

$$\mathrm{ECM}\left(\hat{Z}_F^{(2)}\right) = \sigma_e^2 \Psi_S^{(H)} \Psi_S^{(H)\prime} + \sigma_a^2 \begin{pmatrix} 0_\eta & 0 \\ 0 & \Psi_W^{(H-\eta)} \Psi_W^{(H-\eta)\prime} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

En resumen, el pronóstico de $\mathbf{Z}_F$ se obtiene como suma de los pronósticos de $\mathbf{W}_F$ y $\mathbf{S}_F$, obtenidos por separado. Mientras que la matriz de ECM de dicho pronóstico, es la suma de las correspondientes matrices para los vectores de pronósticos $\hat{\mathbf{W}}_F$ y $\hat{\mathbf{S}}_F$.

6. Estimación de la serie preliminar

La existencia de la serie preliminar observable directamente es algo que pocas veces se presenta en la práctica. En realidad, casi seguramente será necesario estimar los valores de dicha serie a partir de los datos disponibles y cabe recordar que en el proceso de desagregación temporal, la serie preliminar juega un papel primordial para garantizar la objetividad y credibilidad de los resultados que se obtengan. Es más, podría decirse que la calidad de dichos resultados depende esencialmente de la calidad que tenga la serie preliminar. Esta serie se estima comúnmente a partir de datos sobre indicadores con la frecuencia de observación supuesta para $\{Z_t\}$. De hecho, tales indicadores deben estar relacionados con la serie no-observable y reflejar algún tipo de comportamiento esperado en la misma. Tal idea fue expuesta originalmente por Friedman (1962) y ha continuado vigente hasta los trabajos más recientes de Abeysinghe y Lee (1998) y Nieto (1998), al igual que en otros previos, como el de Braun (1990).

Las variables relacionadas con Z, también llamadas indicadores sintéticos, se denotan por $X_1,...,X_G$, en donde $G \geq 1$, y se eligen básicamente por la creencia de que sus movimientos intraperiódicos (digamos mensuales o trimestrales) están fuertemente correlacionados con los movimientos de $\{Z_t\}$. A partir de esta creencia se propone la ecuación

$$W_t = \beta_1 X_{1t} + ... + \beta_G X_{Gt} \text{ , para t = 1,...,mn} \tag{6.1}$$

donde los coeficientes $\beta_1,...,\beta_G$ se deducen de teoría económica o se estiman a partir de los datos, mediante un procedimiento estadístico. Lo más común es utilizar un Modelo de Regresión Lineal Múltiple, ajustado a los datos agregados disponibles de $\{Y_i\}$, usando los datos desagregados de $\{X_{1t},..., X_{Gt}\}$ como variables explicativas. La estimación de dicho modelo se realiza mediante el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios, como a continuación se indica. En principio se postula el modelo para la serie no-observable (véase la similitud con la expresión (3.16)).

$$Z_t = \beta_1 X_{1t} + ... + \beta_G X_{Gt} + \varepsilon_t, \text{ para t = 1,...,mn} \tag{6.2}$$

a partir del cual se deduce el modelo para la serie agregada

$$Y_i = \beta_1 X_{1i}^a + ... + \beta_G X_{Gi}^a + \varepsilon_i^a, \text{ para i= 1,...,n} \tag{6.3}$$

donde $X_1^a,..., X_G^a$ y ε^a guardan con $X_1,..., X_G$ y ε, la misma relación que Y con Z. Es decir, ya que Y_i satisface la relación (2.8), entonces también se cumple que

$$X_{gi}^a = \sum_{j=1}^{m} c_j X_{g,m(i-1)+j} \text{ para g = 1,..., G} \tag{6.4}$$

y lo mismo pasa con ε_i^a en función de ε_t. Lo importante a notar en las ecuaciones (6.1) a (6.3) es que tienen los mismos parámetros (, lo cual posibilita realizar su estimación con (6.3), para insertarlos después en (6.1) y construir de esa manera los datos preliminares.

Ya que la serie preliminar es de crucial importancia para una buena desagregación y que dicha serie se obtiene generalmente a partir de variables relacionadas, se deben tener en mente algunos criterios que guíen para seleccionar las variables $X_1,..., X_G$. Los criterios mínimos que aquí se supondrán para que una de tales variables, digamos X_g , sea potencialmente útil, son: (i) que tenga una interpretación económica adecuada en relación con Z; (ii) que satisfaga el supuesto de Friedman (1962) de alta correlación entre sus movimientos intraperiódicos y los de Z; (iii) que la serie $\{X_{gt}\}$ tenga longitud suficiente para cubrir el periodo t = 1,...,mn y que se continúe observando para t>mn; (iv) que se pueda disponer de los datos de X_g de manera oportuna, para que la desagregación recursiva tenga sentido; y (v) que la calidad estadística de X_g, en el sentido de coherencia en el método de su medición, sea relativamente buena y se mantenga a lo largo del tiempo.

7. Distribución mensual del PIB anual de Guatemala

En Guatemala, al igual que en muchos otros países, existe la necesidad de contar con cifras intraanuales del PIB, que en la actualidad se calculan sólo anualmente. La necesidad básica que podría cubrir una serie de observaciones con frecuencia superior a la anual, es la del análisis coyuntural, es decir, para determinar el comportamiento de la economía del país en el momento presente, el pasado reciente y el futuro cercano. Un primer paso en la dirección de generar esos datos intraanuales del PIB, fue dado al instrumentar el sistema estadístico que produce las cifras del Indicador Mensual de la Actividad Económica (IMAE, Base 1995=100) desde enero de 1993. Con estas dos fuentes de información se tiene acceso entonces a las variables Y = PIB anual y W = IMAE, que permitirán aplicar las metodologías propuestas en las secciones anteriores, para distribuir de manera mensual el PIB, tanto de forma directa como recursiva, y pronosticar los valores mensuales futuros de dicha variable. Para esto se hará el supuesto fundamental de que el IMAE funciona adecuadamente como un indicador sintético del PIB mensual. Desde luego, esto no implica que no deba verificarse empíricamente la compatibilidad entre estas dos series.

Para comenzar, conviene saber que «el IMAE se considera como un indicador de carácter general, en el mismo se incluyen indicadores de las siguientes actividades o sectores económicos: Agropecuario, industria manufacturera, electricidad, comercio, propiedad de vivienda, gobierno y bancos» (Valle, 1999). Los datos del IMAE disponibles al momento de realizar este trabajo cubren el periodo de enero de 1993 a noviembre de 1999, con las cifras de 1999 aún preliminares (el Anexo 1 contiene un cuadro con estos datos). De igual manera, el Cuadro 1 que se muestra a continuación, contiene los datos del PIB anual que se utilizarán en este trabajo.

Cuadro 1.
Producto Interno Bruto a precios de mercado
(Miles de quetzales de 1958)

Año	1993	1994	1995	1996	1997	1998 p/
PIB	3828259.7	3982681.8	4179766.7	4303395.0	4491199.0	4722466.2

p/Cifra preliminar.
Fuente: Sección de Cuentas Nacionales, Banco de Guatemala.

A partir de las cifras del PIB anual y del IMAE mensual, se estimó una serie preliminar del PIB desagregado mensual, según se indica en la Sección 6. Para ello se usó un Modelo de Regresión Lineal, con los datos del IMAE agregados al año mediante un promedio, los cuales forman la serie INDIAGR, que se presenta en el Cuadro 2. Los resultados de dicha estimación para los años i = 1,...,6 (o sea, 1993 a 1998) fueron

$$\underset{}{PIB_i = -84020.15 + 42801.49 INDIAGR_i}, \quad \overline{R}^2 = 0.9928 \qquad (7.1)$$
$$(165406.76) \quad (1629.16)$$

donde los valores entre paréntesis son los errores estándar de las respectivas estimaciones. De esta forma se pudo construir la serie de datos mensuales, para $t = 1,...,72$ (o sea, de enero de 1993 a diciembre de 1998) con la ecuación

$$W_t = -84020.15 + 42801.49 IMAE_t \quad (7.2)$$

Dichos valores fueron entonces agregados al año y produjeron los valores para i = 1,...,6, junto con las diferencias $DIFERAGR_i = PIB_i - PIBMENAG_i$, que también se muestran en el Cuadro 2.

Cuadro 2.
Estimación de la serie de diferencias entre el PIB anual y la serie preliminar agregada

	Año					
Serie	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**
INDIAGR	91.72	95.11	100.00	101.60	106.39	112.90
PIBMENAG	3841910.4	3987007.5	4196128.4	4264789.1	4469558.5	4748374.5
DIFERAGR	-13650.7	-4325.7	-16361.7	38605.9	21640.5	-25908.3

En los resultados anteriores se aprecia una fuerte relación lineal entre el PIB y el IMAE agregado (INDIAGR), según lo indica el coeficiente R^2. Asimismo, la pendiente de la recta tiene un valor estimado que corresponde a más de veintiseis veces su error estándar, lo cual conduce a pensar que INDIAGR sirve realmente como predictor del PIB. Conviene apreciar que la ordenada de la recta estimada no es significativamente diferente de cero, sin embargo se decidió incluirla en la ecuación (7.2) para evitar posibles sesgos en la predicción de los valores $\{W_i\}$. Por su lado, el Cuadro 2 muestra los valores de la serie anual DIFERAGR, cuyo valor más grande corresponde al año de 1996 y que señala a este año como peculiar, en tanto que registró un valor del PIB mayor que el esperado, de acuerdo con el comportamiento del IMAE. No obstante, hay muy pocos datos de la variable DIFERAGR como para tener evidencia suficiente de que dicho año presenta, efectivamente, un dato atípico. Por consiguiente, de aquí en adelante se trabajará con los datos de la serie preliminar , obtenida de acuerdo con la ecuación $\{W_t\}$ (7.2).

El paso siguiente consistió en estimar las autocovarianzas para la serie de datos de la variable DIFERAGR, que se denotará en lo sucesivo como $\{D_i\}$, para ser consistentes con la notación de las secciones anteriores. El Cuadro 3 muestra las autocovarianzas que fue posible estimar con sólo seis datos de la serie, al igual que las autocorrelaciones correspondientes, definidas como $\hat{\rho}_D(k) = \hat{\gamma}_D(k)/\hat{\gamma}_D(0)$ para $k = 0,1,\ldots$.

Cuadro 3. Autocovarianzas y autocorrelaciones estimadas para la serie $\{D_i\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$\hat{\gamma}_D(k)$	620545179	-45410565	-25958727	-39340765	36667518	70733463
$\hat{\rho}_D(k)$	1	-0.0732	-0.4183	-0.0634	-0.0591	0.1140

Error estándar de las autocorrelaciones, en el supuesto de Ruido Blanco: 0.4082

Las autocorrelaciones sirven para identificar un modelo del tipo ARMA(P,Q) para $\{D_i\}$, en este caso el modelo identificado resultó ser un ARMA(0,0). Este modelo debe considerarse una aproximación, debido primordialmente al reducido número de datos, lo que no permite hacer una buena estimación de las autocorrelaciones. En consecuencia, el modelo para la serie mensual de diferencias $\{S_t\}$, se comportará de acuerdo con un modelo ARMA(p,q), en donde p = P = 0 y, de acuerdo con el método de Wei y Stram (1990), se supondrá q = p+1 = 1. Entonces, la ecuación (3.8) se convierte en

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_S(0) \\ \hat{\gamma}_S(1) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_D(0) \\ \hat{\gamma}_D(1) \end{pmatrix} \qquad (7.3)$$

en donde

$$T = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} + a_{13} \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \qquad (7.4)$$

con la constante a_i definida como el coeficiente de B^{i-1} en el polinomio $(1 + B + \ldots + B^{11})^2$, para i = 1,...,23 (cabe aclarar que en el artículo de Wei y Stram se indica que es el coeficiente de B^i, lo cual es erróneo). Ya que

$$(1 + B + \ldots + B^{11})^2 = \sum_{i=1}^{11} iB^{i-1} + \sum_{i=12}^{23} (24 - i)B^{i-1} \qquad (7.5)$$

es claro que para i=1,...,11 y para i=12,...,23. En consecuencia, (7.3) conduce a

$$\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_S(0)\\ \hat{\gamma}_S(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/12 & -22/12\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\gamma}_D(0)\\ \hat{\gamma}_D(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}134964801\\ -45410565\end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Ahora bien, como sigue un proceso ARMA(0,1), se sabe que $S_t = (1+\theta B)e_t$, con autocovarianzas $\gamma_S(0)=\sigma_e^2(1+\theta^2)$ y $\gamma_S(1)=\theta\sigma_e^2$, de forma tal que

$$\frac{\hat{\theta}}{1+\hat{\theta}^2}=\frac{\hat{\gamma}_S(1)}{\hat{\gamma}_S(0)} \quad (7.7)$$

y, por ende, $\hat{\theta}$ se obtiene como solución de la ecuación

$$\hat{\gamma}_S(1)-\hat{\gamma}_S(0)\hat{\theta}+\hat{\gamma}_S(1)\hat{\theta}^2 = 0 \quad (7.8)$$

Las raíces de esta ecuación son $\theta_1 = -2.5853$ y $\theta_2 = -0.3868$, la primera de las cuales no satisface la condición de invertibilidad y por ello se elige $\hat{\theta} = -0.3868$.

Una vez conocido el modelo (estimado) para representar a la serie $\{S_t\}$, se puede aplicar la Proposición 1 para distribuir de forma directa la serie del PIB. Un aspecto que conviene hacer notar es que la matriz $\Psi_S\Psi'_S$, que en este caso surge del modelo ARMA(0,1), tiene todos sus elementos en la diagonal iguales a $1+\hat{\theta}^2$, excepto el primero, que es la unidad. Una corrección que es útil emplear, para evitar que este hecho produzca valores desagregados al principio y al final de la serie con varianzas distintas a las del resto de la serie, consiste en sustituir el primer elemento de la matriz para hacerlo igual a los demás. Una justificación de esta corrección, aunque en el contexto ligeramente distinto de Mínimos Cuadrados Generalizados, aparece en la Sección 5.2 del libro de Judge, Griffiths, Hill y Lee (1980). Los resultados que surgen de la aplicación citada se muestran en el Cuadro 4, aunque una apreciación más clara de los mismos se logra en la Figura 1 que aparece al final del documento. En estos resultados se hace evidente la cercanía de la serie desagregada a la serie preliminar, con ligeros alejamientos durante el año 1996, los cuales son originados fundamentalmente por la diferencia entre el PIB anual observado y el valor agregado anual de la serie preliminar.

Cuadro 4.
Resultados de la desagregación directa del PIB

Año	Serie Preliminar	Límite del 95%	Serie desagregada	Límite del 95%	Error estándar	Tasa anual
1993	3996245.44	3644672.13	3971796.93	4298921.73	166900.41	—
	3807490.89	3455379.45	3795439.48	4135499.51	173500.01	—
	4008229.85	3656118.42	3996178.44	4336238.47	173500.01	—
	3426557.67	3074446.23	3414506.26	3754566.29	173500.01	—
	3360215.37	3008103.93	3348163.96	3688223.99	173500.01	—
	3229242.82	2877131.39	3217191.41	3557251.44	173500.01	—
	3426129.66	3074018.22	3414078.25	3754138.27	173500.01	—
	3510020.57	3157909.13	3497969.16	3838029.19	173500.01	—
	3843016.12	3490904.68	3830964.71	4171024.74	173500.01	—
	4212820.95	3860709.52	4200769.54	4540829.57	173500.01	—
	4497878.85	4145767.41	4485827.44	4825887.46	173500.01	—
	4785076.81	4442326.26	4766230.82	5090135.37	165257.43	—
1994	4182859.91	3860374.43	4184208.21	4508041.99	165221.32	5.35
	3926051.00	3580566.73	3920604.71	4260642.69	173488.77	3.30
	4002665.66	3657181.39	3997219.37	4337257.35	173488.77	0.03
	3678658.42	3333174.15	3673212.13	4013250.11	173488.77	7.58
	3546829.84	3201345.57	3541383.55	3881421.54	173488.77	5.77
	3383756.19	3038271.92	3378309.90	3718347.88	173488.77	5.01
	3424417.60	3078933.33	3418971.31	3759009.29	173488.77	0.14
	3596479.57	3250995.30	3591033.28	3931071.26	173488.77	2.66
	3953015.94	3607531.67	3947569.65	4287607.63	173488.77	3.04
	4360058.06	4014573.79	4354611.77	4694649.75	173488.77	3.66
	4826594.25	4481109.98	4821147.96	5161185.94	173488.77	7.48
	4962702.97	4640093.49	4963909.75	5287726.01	165212.38	4.15
1995	4464493.69	4122110.90	4445926.78	4769742.66	165212.18	6.25
	4257334.50	3905382.80	4245420.66	4585458.52	173488.70	8.28
	4262042.66	3910090.96	4250128.82	4590166.68	173488.70	6.33
	3736868.44	3384916.74	3724954.60	4064992.46	173488.70	1.41
	3753561.02	3401609.32	3741647.18	4081685.04	173488.70	5.65
	3565662.50	3213710.80	3553748.66	3893786.52	173488.70	5.19
	3663677.90	3311726.20	3651764.06	3991801.92	173488.70	6.81
	3890525.77	3538574.07	3878611.93	4218649.79	173488.70	8.01
	4053599.43	3701647.73	4041685.59	4381723.45	173488.70	2.38
	4780368.65	4428416.95	4768454.81	5108492.67	173488.70	9.50
	4827450.28	4475498.58	4815536.44	5155574.30	173488.70	-0.12
	5097955.67	4715505.09	5039320.87	5363136.65	165212.13	1.52

Cuadro 4 (Cont.)
Resultados de la desagregación directa del PIB

Año	Serie Preliminar	Límite del 95%	Serie desagregada	Límite el 95%	Error estándar	Tasa anual
1996	4591614.10	4348023.60	4671839.38	4995655.16	165212.13	5.08
	4360058.06	4053524.53	4393562.39	4733600.25	173488.70	3.49
	4312976.43	4006442.89	4346480.75	4686518.62	173488.70	2.27
	3787374.19	3480840.66	3820878.52	4160916.38	173488.70	2.58
	3649125.39	3342591.86	3682629.72	4022667.58	173488.70	-1.58
	3595195.52	3288661.99	3628699.85	3968737.71	173488.70	2.11
	3833599.80	3527066.26	3867104.12	4207141.98	173488.70	5.90
	3823755.45	3517221.92	3857259.78	4197297.64	173488.70	-0.55
	4201264.55	3894731.02	4234768.88	4574806.74	173488.70	4.78
	4745271.43	4438737.89	4778775.76	5118813.62	173488.70	0.22
	4855271.25	4548737.71	4888775.57	5228813.43	173488.70	1.52
	5421962.91	5146149.41	5469965.28	5793781.16	165212.18	8.55
1997	5158305.76	4839402.01	5163218.27	5487034.52	165212.38	10.52
	4391303.15	4070675.72	4410713.70	4750751.68	173488.77	0.39
	4400719.47	4080092.04	4420130.02	4760168.01	173488.77	1.69
	4009513.90	3688886.47	4028924.45	4368962.43	173488.77	5.44
	3911926.51	3591299.08	3931337.06	4271375.04	173488.77	6.75
	3757413.15	3436785.72	3776823.70	4116861.68	173488.77	4.08
	3910214.45	3589587.02	3929625.00	4269662.98	173488.77	1.62
	4089980.69	3769353.26	4109391.24	4449429.22	173488.77	6.54
	4416128.01	4095500.58	4435538.56	4775576.54	173488.77	4.74
	4886516.33	4565888.90	4905926.88	5245964.86	173488.77	2.66
	5245620.79	4924993.36	5265031.34	5605069.32	173488.77	7.70
	5457060.13	5193893.99	5517727.77	5841561.55	165221.32	0.87
1998	5029473.29	4643615.55	4967520.10	5291424.66	165257.43	-3.79
	4778228.57	4417472.44	4757532.47	5097592.50	173500.01	7.86
	4728150.84	4367394.71	4707454.74	5047514.76	173500.01	6.50
	4460213.54	4099457.41	4439517.44	4779577.47	173500.01	10.19
	4152042.84	3791286.72	4131346.74	4471406.77	173500.01	5.09
	4058735.61	3697979.48	4038039.51	4378099.54	173500.01	6.92
	4194416.32	3833660.19	4173720.21	4513780.24	173500.01	6.21
	4184571.97	3823815.85	4163875.87	4503935.90	173500.01	1.33
	4909201.12	4548444.99	4888505.02	5228565.05	173500.01	10.21
	5401418.20	5040662.07	5380722.10	5720782.13	173500.01	9.68
	5349628.40	4988872.27	5328932.30	5668992.33	173500.01	1.21
	5734413.75	5365303.10	5692427.90	6019552.69	166900.41	3.17

Los errores estándar de la estimación del Cuadro 4 son relativamente constantes, lo que se manifiesta en unas bandas de predicción del 95% cuya amplitud es prácticamente invariante en el tiempo. Conviene señalar que los errores estándar $(\hat{e}e_t)$ se obtuvieron como la raíz cuadrada de los elementos en la diagonal de la matriz (3.2) estimada. Asimismo, los límites de 95% se calcularon en el supuesto de Normalidad de la variable S_t, mediante la expresión

$$\hat{Z}_t \pm 1.96\hat{e}e_t \qquad (7.9)$$

en donde es el error estándar estimado del valor desagregado.

En el Cuadro 4 también se presenta la tasa anual de crecimiento de la serie desagregada, expresada en porcentaje, que al compararse con la respectiva tasa anual del IMAE (véase el Anexo 1) muestra un comportamiento muy parecido en general, aunque difiere un poco en magnitud (no así en signo) en 1996. Esto refuerza el hallazgo que se mencionó previamente acerca de que la cifra del PIB anual de 1996 es, hasta cierto punto, discordante con las de los otros años considerados. Por último, la desagregación directa se validó con el estadístico de compatibilidad, cuyo valor calculado fué

$$Kcalc = 3.13 \quad \text{con 6 grados de libertad} \qquad (7.10)$$

y que dió una probabilidad de significación de 0.79, lo cual indica que las series preliminar y desagregada son razonablemente compatibles.

En este caso, la aplicación directa es suficiente para obtener las cifras desagregadas del PIB para todo el periodo histórico, que cubre los años 1993 a 1998. Por lo tanto, no se requiere utilizar el procedimiento recursivo. No obstante, como un mero ejercicio ilustrativo de los resultados que produce este procedimiento, se considerará la situación hipotética en la cual sólo se han desagregado de forma directa las observaciones para 1993 a 1997 y recién se acaba de conocer la cifra del PIB anual para 1998 (desde luego, también se suponen conocidos los valores mensuales del IMAE para ese año). Los resultados de la desagregación recursiva se muestran en el Cuadro 5 y la Figura 2.

Al comparar los Cuadros 4 y 5, así como las Figuras 1 y 2, se observa un comportamiento bastante similar, tanto de las cifras desagregadas (y por consiguiente de la tasa anual) como de los errores estándar y los límites de predicción del 95% correspondientes, lo cual era de esperarse. Debe recordarse que los resultados de la desagregación directa no pueden ser idénticos a los de la desagregación recursiva, puesto que esta última presupone que las cifras desagregadas para los años previos al que se desea desagregar ya están fijas, mientras que en la desagregación directa no hay cifras desagregadas con anterioridad. La verificación empírica de que las cifras desagregadas y las preliminares son compatibles, se realiza con el estadístico

$$K^*_{calc} = 0.68 \quad \text{con 1 grado de libertad} \qquad (7.11)$$

cuyo nivel de significación alcanzado es de 0.41.

La tercera metodología por aplicar al caso del PIB de Guatemala es la del pronóstico ex-ante de valores desagregados, para lo cual se requiere construir un modelo ARIMA para la serie preliminar $\{W_t\}$. Como resultado de utilizar la metodología estándar de aplicación de este tipo de modelos (véase, por ejemplo, el libro de Guerrero, 1991) se obtuvo el siguiente modelo estimado

$$(1-B)(1-B^{12})W_t = (1-0.7173B-0.2508B^2)(1-0.6684B^{12})\hat{a}_t, \ \hat{\sigma}_a = 132254.14 \qquad (7.12)$$

$$(0.1321) \quad (0.1305) \qquad (0.1341)$$

Este modelo está apoyado empíricamente por el hecho de que el estadístico de Ljung y Box tomó el valor

$$Q = 13.07 \quad \text{con 21 grados de libertad} \qquad (7.13)$$

el cual debe compararse con una distribución Ji-cuadrada y brinda el nivel de significación 0.91, que no permite rechazar la hipótesis nula de que los residuos del modelo se comportan como Ruido Blanco. Dicho modelo fue utilizado para pronosticar la serie preliminar. De hecho, los cuadros que se presentan más adelante, con los pronósticos ex-ante del PIB mensual, forman parte de un ejercicio que pretende ilustrar los resultados que surgen de la aplicación de la metodología desarrollada en la Sección 5.

Cuadro 5. Resultados de la desagregación recursiva del PIB para 1998

Año	Serie Preliminar	Límite del 95%	Serie desagregada	Límite del 95%	Error estándar	Tasa anual
1998	5029473.29	4657386.51	4984605.86	5311825.20	166948.65	-3.46
	4778228.57	4416029.32	4756112.06	5096194.79	173511.60	7.83
	4728150.84	4365951.58	4706034.32	5046117.05	173511.60	6.47
	4460213.54	4098014.29	4438097.02	4778179.75	173511.60	10.16
	4152042.84	3789843.59	4129926.33	4470009.06	173511.60	5.05
	4058735.61	3696536.36	4036619.09	4376701.82	173511.60	6.88
	4194416.32	3832217.06	4172299.80	4512382.53	173511.60	6.18
	4184571.97	3822372.72	4162455.46	4502538.19	173511.60	1.29
	4909201.12	4547001.87	4887084.60	5227167.33	173511.60	10.18
	5401418.20	5039218.95	5379301.68	5719384.41	173511.60	9.65
	5349628.40	4987429.15	5327511.88	5667594.62	173511.60	1.19
	5734413.75	5362326.97	5689546.32	6016765.66	166948.65	3.11

El Cuadro 6 contiene los pronósticos del PIB, junto con sus errores estándar, límites de predicción y tasa de crecimiento anual, en el supuesto de que no existe ninguna observación preliminar para el horizonte de pronóstico, que cubre de enero de 1999 a diciembre de 2000. Para poder obtener dichos pronósticos se utilizó también el modelo previamente estimado para la serie $\{S_t\}$, esto es

$$S_t = (1 - 0.3868B)\hat{e}_t \text{ con } \hat{\sigma}_e = 163743.40 \quad (7.14)$$

donde la estimación de σ_e^2 se realizó con la expresión (3.13).

Cuadro 6.
Resultados del pronóstico ex-ante del PIB (0 observaciones preliminares)

Año	Serie Preliminar	Límite del 95%	Serie Pronosticada	Límite del 95%	Error estándar	Tasa anual
1999	nd	4863880.26	5276426.50	5688972.75	210482.78	6.22
	nd	4449079.02	4886086.65	5323094.28	222963.08	2.70
	nd	4459822.17	4896908.13	5333994.08	223003.04	4.02
	nd	4055278.45	4492442.71	4929606.97	223042.99	1.19
	nd	3894975.72	4332218.27	4769460.83	223082.94	4.86
	nd	3774849.49	4212170.33	4649491.17	223122.88	4.31
	nd	3927611.23	4365010.33	4802409.44	223162.81	4.58
	nd	4007695.26	4445172.62	4882649.98	223202.74	6.76
	nd	4460290.41	4897846.01	5335401.61	223242.65	0.19
	nd	4956521.57	5394155.40	5831789.22	223282.56	0.25
	nd	5108724.62	5546436.66	5984148.69	223322.47	4.08
	nd	5441166.80	5878957.03	6316747.27	223362.37	3.28
Promedio	—	—	4885319.22	—	—	3.45
2000	nd	4974929.78	5422746.74	5870563.70	228478.04	2.77
	nd	4617222.55	5066222.82	5515223.10	229081.77	3.69
	nd	4627908.87	5077044.30	5526179.73	229150.73	3.68
	nd	4223308.33	4672578.88	5121849.43	229219.67	4.01
	nd	4062948.82	4512354.44	4961760.07	229288.59	4.16
	nd	3942765.84	4392306.50	4841847.16	229357.48	4.28
	nd	4095470.84	4545146.50	4994822.16	229426.36	4.13
	nd	4175498.18	4625308.79	5075119.41	229495.21	4.05
	nd	4628036.65	5077982.18	5527927.71	229564.05	3.68
	nd	5124211.16	5574291.57	6024371.98	229632.86	3.34
	nd	5276357.58	5726572.83	6176788.07	229701.65	3.25
	nd	5608743.17	6059093.20	6509443.24	229770.43	3.06
Promedio	—	—	5062637.40	—	—	3.63

nd = Dato no disponible

Por su lado, los cuadros del 7 al 11 consideran la presencia de cifras preliminares, comenzando con el caso hipotético en que sólo se dispone de una observación preliminar durante el horizonte de pronóstico (la de enero de 1999) hasta llegar al caso verdadero en que se cuenta con once observaciones preliminares, que van de enero a noviembre de 1999. En particular, el Cuadro 7 muestra un valor pronosticado del PIB para enero de 1999 que difiere de la cifra preliminar, lo cual se debe a que dicho valor pronosticado tiene sumado el pronóstico de la serie $\{S_1\}$ para ese mes, que es distinto de cero.

Cuadro 7.
Resultados del pronóstico ex-ante del PIB (1 observación preliminar)

Año	Serie Preliminar	Límite del 95%	Serie Pronosticada	Límite del 95%	Error estándar	Tasa anual
1999	5399278.12	5099630.22	5420567.88	5741505.54	163743.70	9.12
	nd	4496019.67	4926838.45	5357657.22	219805.50	3.56
	nd	4464501.49	4901509.12	5338516.75	222963.08	4.12
	nd	4059957.75	4497043.70	4934129.65	223003.04	1.30
	nd	3899655.01	4336819.27	4773983.53	223042.99	4.97
	nd	3779528.77	4216771.32	4654013.88	223082.94	4.43
	nd	3932290.49	4369611.33	4806932.17	223122.88	4.69
	nd	4012374.51	4449773.62	4887172.72	223162.81	6.87
	nd	4464969.64	4902447.00	5339924.36	223202.74	0.29
	nd	4961200.79	5398756.39	5836311.99	223242.65	0.34
	nd	5113403.82	5551037.65	5988671.47	223282.56	4.17
	nd	5445845.99	5883558.03	6321270.06	223322.47	3.36
Promedio	—	—	4904561.15	—	—	3.92
2000	nd	5037355.79	5475146.03	5912936.26	223362.37	1.01
	nd	4636520.40	5084337.36	5532154.32	228478.04	3.20
	nd	4634170.61	5083170.88	5532171.16	229081.77	3.71
	nd	4229570.03	4678705.46	5127840.90	229150.73	4.04
	nd	4069210.48	4518481.03	4967751.58	229219.67	4.19
	nd	3949027.46	4398433.09	4847838.71	229288.59	4.31
	nd	4101732.42	4551273.09	5000813.75	229357.48	4.16
	nd	4181759.72	4631435.38	5081111.04	229426.36	4.08
	nd	4634298.15	5084108.77	5533919.38	229495.21	3.71
	nd	5130472.62	5580418.15	6030363.69	229564.05	3.36
	nd	5282619.00	5732699.41	6182779.82	229632.86	3.27
	nd	5615004.55	6065219.79	6515435.03	229701.65	3.09
Promedio	—	—	5073619.04	—	—	3.45

nd = Dato no disponible

Por su lado, el Cuadro 8 muestra un pronóstico para febrero de 1999 que coincide con su valor preliminar, y lo mismo ocurre con los pronósticos para febrero y marzo de 1999 en el Cuadro 9. Así ocurre sucesivamente, hasta llegar al Cuadro 11, en el cual se observa que los pronósticos de febrero a noviembre de 1999 son idénticos a sus correspondientes valores preliminares. Esto se debe a que los pronósticos de la serie $\{S_t\}$ para los meses de febrero de 1999 en adelante, a partir del origen de pronóstico situado en diciembre de 1998, son iguales a cero, pues el modelo (7.14) tiene memoria restringida a un solo periodo.

Cuadro 8.
Resultados del pronóstico ex-ante del PIB (2 observaciones preliminares)

Año	Serie Preliminar	Límite del 95%	Serie Pronosticada	Límite del 95%	Error estándar	Tasa anual
1999	5399278.12	5099630.22	5420567.88	5741505.54	163743.70	9.12
	4904920.97	4560811.40	4904920.97	5249030.53	175566.10	3.10
	nd	4469990.74	4900809.51	5331628.29	219805.50	4.11
	nd	4059336.47	4496344.10	4933351.72	222963.08	1.28
	nd	3899033.71	4336119.66	4773205.61	223003.04	4.96
	nd	3778907.46	4216071.72	4653235.98	223042.99	4.41
	nd	3931669.16	4368911.72	4806154.28	223082.94	4.68
	nd	4011753.17	4449074.01	4886394.85	223122.88	6.85
	nd	4464348.29	4901747.40	5339146.50	223162.81	0.27
	nd	4960579.42	5398056.78	5835534.15	223202.74	0.32
	nd	5112782.44	5550338.04	5987893.64	223242.65	4.15
	nd	5445224.59	5882858.42	6320492.25	223282.56	3.35
	nd	5029466.39	5467178.43	5904890.47	223322.47	0.86
Promedio	—	—	4902151.68	—	—	3.42
2000	nd	4643792.71	5081582.94	5519373.18	223362.37	3.60
	nd	4634422.34	5082239.30	5530056.26	228478.04	3.70
	nd	4228773.61	4677773.88	5126774.16	229081.77	4.04
	nd	4068414.02	4517549.45	4966684.88	229150.73	4.18
	nd	3948230.96	4397501.51	4846772.06	229219.67	4.30
	nd	4100935.88	4550341.51	4999747.14	229288.59	4.15
	nd	4180963.13	4630503.80	5080044.46	229357.48	4.08
	nd	4633501.52	5083177.19	5532852.85	229426.36	3.70
	nd	5129675.96	5579486.57	6029297.19	229495.21	3.36
	nd	5281822.30	5731767.83	6181713.36	229564.05	3.27
	nd	5614207.80	6064288.21	6514368.62	229632.86	3.08
Promedio	—	—	5071949.22	—	—	3.46

nd = Dato no disponible

En lo que toca a los errores estándar dentro de cada uno de los Cuadros 6 a 11, puede observarse que sus valores crecen conforme el mes a pronosticar está más alejado de diciembre de 1998. No obstante, al incluir las observaciones preliminares una por una, de forma tal que se pase del Cuadro 8 al Cuadro 9, por ejemplo, los errores estándar disminuyen. Además, una vez que se incluye la observación preliminar correspondiente a un cierto mes, el error estándar del pronóstico se estabiliza en relación con los errores estándar previos.

Cuadro 9.
Resultados del pronóstico ex-ante del PIB (3 observaciones preliminares)

Año	Serie Preliminar	Límite del 95%	Serie Pronosticada	Límite del 95%	Error estándar	Tasa anual
1999	5399278.12	5099630.22	5420567.88	5741505.54	163743.70	9.12
	4904920.97	4560811.40	4904920.97	5249030.53	175566.10	3.10
	5154025.61	4809916.05	5154025.61	5498135.18	175566.10	9.49
	nd	4073607.98	4504426.75	4935245.53	219805.50	1.46
	nd	3907194.69	4344202.32	4781209.95	222963.08	5.15
	nd	3787068.42	4224154.37	4661240.33	223003.04	4.61
	nd	3939830.12	4376994.38	4814158.64	223042.99	4.87
	nd	4019914.11	4457156.67	4894399.23	223082.94	7.04
	nd	4472509.22	4909830.06	5347150.89	223122.88	0.44
	nd	4968740.34	5406139.44	5843538.55	223162.81	0.47
	nd	5120943.34	5558420.70	5995898.06	223202.74	4.31
	nd	5453385.48	5890941.08	6328496.68	223242.65	3.49
Promedio	—	—	4929315.02	—	—	4.38
2000	nd	5121595.49	5559229.32	5996863.15	223282.56	2.56
	nd	4675693.08	5113405.12	5551117.16	223322.47	4.25
	nd	4655211.76	5093002.00	5530792.24	223362.37	-1.18
	nd	4240719.62	4688536.58	5136353.54	228478.04	4.09
	nd	4079311.87	4528312.15	4977312.42	229081.77	4.24
	nd	3959128.77	4408264.20	4857399.63	229150.73	4.36
	nd	4111833.66	4561104.21	5010374.76	229219.67	4.21
	nd	4191860.87	4641266.50	5090672.12	229288.59	4.13
	nd	4644399.22	5093939.88	5543480.55	229357.48	3.75
	nd	5140573.61	5590249.27	6039924.93	229426.36	3.41
	nd	5292719.91	5742530.53	6192341.14	229495.21	3.31
	nd	5625105.37	6075050.91	6524996.44	229564.05	3.13
Promedio	—	—	5091240.89	—	—	3.28

nd = Dato no disponible

Desde luego, los límites de predicción del 95% se obtienen a partir de los errores estándar, aplicando básicamente la expresión (7.9), pero calculando el error estándar como la raíz cuadrada de los elementos en la diagonal de la matriz (5.6) o (5.10), según corresponda. Tanto los pronósticos como los límites de predicción pueden apreciarse visualmente, de manera global, en la Figura 3. En la gráfica de esta figura se presenta un resumen de los resultados producidos por las metodologías de desagregación (directa y recursiva), así como por los pronósticos que surgen al considerar las observaciones preliminares de enero a septiembre de 1999.

Cuadro 10.
Resultados del pronóstico ex-ante del PIB (7 observaciones preliminares)

Año	Serie Preliminar	Límite del 95%	Serie Pronosticada	Límite del 95%	Error estándar	Tasa anual
1999	5399278.12	5099630.22	5420567.88	5741505.54	163743.70	9.12
	4904920.97	4560811.40	4904920.97	5249030.53	175566.10	3.10
	5154025.61	4809916.05	5154025.61	5498135.18	175566.10	9.49
	4457645.45	4113535.88	4457645.45	4801755.01	175566.10	0.41
	4284727.45	3940617.88	4284727.45	4628837.01	175566.10	3.71
	4087412.60	3743303.04	4087412.60	4431522.17	175566.10	1.22
	4269746.93	3925637.36	4269746.93	4613856.49	175566.10	2.30
	nd	4015555.12	4446373.90	4877192.68	219805.50	6.78
	nd	4462039.66	4899047.29	5336054.91	222963.08	0.22
	nd	4958270.72	5395356.67	5832442.63	223003.04	0.27
	nd	5110473.67	5547637.93	5984802.19	223042.99	4.10
	nd	5442915.75	5880158.31	6317400.87	223082.94	3.30
Promedio	—	—	4895635.08	—	—	3.67
2000	nd	4999106.87	5436427.71	5873748.55	223122.88	0.29
	nd	4633553.25	5070952.36	5508351.47	223162.81	3.38
	nd	4641166.53	5078643.89	5516121.25	223202.74	-1.46
	nd	4236622.87	4674178.47	5111734.08	223242.65	4.86
	nd	4076320.21	4513954.04	4951587.87	223282.56	5.35
	nd	3956194.06	4393906.10	4831618.13	223322.47	7.50
	nd	4108955.86	4546746.10	4984536.34	223362.37	6.49
	nd	4179091.43	4626908.39	5074725.35	228478.04	4.06
	nd	4630581.50	5079581.78	5528582.05	229081.77	3.69
	nd	5126755.73	5575891.16	6025026.59	229150.73	3.35
	nd	5278901.87	5728172.42	6177442.97	229219.67	3.25
	nd	5611287.17	6060692.80	6510098.43	229288.59	3.07
Promedio	—	—	5065504.60	—	—	3.47

nd = Dato no disponible

Es interesante notar que el Banco de Guatemala realiza estimaciones del PIB anual y, en el caso que aquí concierne, tal estimación del PIB anual de 1999 asciende a 4885426.1 (miles de quetzales de 1958). Tal valor estimado es bastante cercano al pronóstico que surge al promediar los valores pronosticados del PIB mensual anualizado que no tiene en cuenta ninguna observación preliminar, esto es, 4885319.2 (véase el Cuadro 6). Conforme las observaciones preliminares van surgiendo, el pronóstico va cambiando y, en el supuesto de validez de las cifras del IMAE (de tal manera que las cifras de la serie preliminar se puedan considerar adecuadas) el pronóstico deberá ir acercándose cada vez más al valor verdadero del PIB del año en consideración.

Cuadro 11.
Resultados del pronóstico ex-ante del PIB (11 observaciones preliminares)

Año	Serie Preliminar	Límite del 95%	Serie Pronosticada	Límite del 95%	Error estándar	Tasa anual
1999	5399278.12	5099630.22	5420567.88	5741505.54	163743.70	9.12
	4904920.97	4560811.40	4904920.97	5249030.53	175566.10	3.10
	5154025.61	4809916.05	5154025.61	5498135.18	175566.10	9.49
	4457645.45	4113535.88	4457645.45	4801755.01	175566.10	0.41
	4284727.45	3940617.88	4284727.45	4628837.01	175566.10	3.71
	4087412.60	3743303.04	4087412.60	4431522.17	175566.10	1.22
	4269746.93	3925637.36	4269746.93	4613856.49	175566.10	2.30
	4388307.04	4044197.48	4388307.04	4732416.61	175566.10	5.39
	5007644.53	4663534.97	5007644.53	5351754.10	175566.10	2.44
	5623129.89	5279020.33	5623129.89	5967239.46	175566.10	4.51
	5698032.49	5353922.93	5698032.49	6042142.05	175566.10	6.93
	nd	5462745.62	5893564.40	6324383.18	219805.50	3.53
Promedio	—	—	4932477.10	—	—	4.45
2000	nd	5152097.91	5589105.53	6026113.16	222963.08	3.11
	nd	4686647.43	5123733.38	5560819.34	223003.04	4.46
	nd	4659330.90	5096495.16	5533659.42	223042.99	-1.12
	nd	4254787.19	4692029.74	5129272.30	223082.94	5.26
	nd	4094484.47	4531805.31	4969126.15	223122.88	5.77
	nd	3974358.26	4411757.36	4849156.47	223162.81	7.94
	nd	4127120.01	4564597.37	5002074.73	223202.74	6.91
	nd	4207204.06	4644759.66	5082315.26	223242.65	5.84
	nd	4659799.22	5097433.04	5535066.87	223282.56	1.79
	nd	5156030.39	5593742.43	6031454.47	223322.47	-0.52
	nd	5308233.45	5746023.69	6183813.93	223362.37	0.84
	nd	5630727.11	6078544.07	6526361.03	228478.04	3.14
Promedio	—	—	5097502.23	—	—	3.35

nd = Dato no disponible

8. Conclusiones y recomendaciones

Los procedimientos propuestos en este artículo están respaldados por diversos resultados intermedios ya conocidos, que son óptimos para solucionar una parte específica de los problemas de desagregación y pronóstico de una serie de tiempo no-observable. Cada uno de tales resultados se deduce de supuestos, los cuales deben ser validados empíricamente para cuidar que la optimalidad correspondiente no se pierda. Los supuestos más importantes fueron hechos explícitos al derivar los métodos aquí obtenidos; sin embargo, hay otros supuestos tácitos que también deben tenerse en cuenta. Uno de tales supuestos es que los modelos para las series preliminar y de diferencias, no cambian al paso del tiempo; es decir, que las representaciones que proporcionan a las series observadas permanecen válidas para periodos posteriores y que, por lo tanto, las series en sí no modificarán su comportamiento en el futuro. Este supuesto puede verse invalidado por la presencia de cambios estructurales en dichas series observadas, $\{W_t\}$ y $\{D_t\}$. Así pues, una labor que debe realizarse en la aplicación rutinaria de los procedimientos, es la verificación de que no haya cambios estructurales y, en caso de haberlos, se deben incluir sus efectos en los modelos previamente especificados.

Aún si no se presentan cambios estructurales bruscos, es natural pensar que las series cambien su comportamiento dinámico paulatinamente. Es de esperar entonces que, al paso del tiempo los modelos (incluyendo los parámetros estimados) pierdan efectividad en su representación y que, por tal motivo, se requiera llevar a cabo una actualización de modelos, o bien una reestimación de los parámetros involucrados. En particular, esta labor de actualización de los modelos debe realizarse tanto más frecuentemente, cuanto más cifras de la serie anual $\{Y_i\}$ sean provisionales y, por lo tanto, estén sujetas a cambios por revisiones.

Debe ser claro también que cualquier método estadístico que haga uso de información auxiliar en forma de indicadores sintéticos, como sucede con la metodología que aquí se presenta, dependerá fundamentalmente de la calidad estadística de tales indicadores. Por ello debe ponerse un cuidado especial en mantener y, de ser posible, mejorar la forma en que los indicadores se producen. Una manera en que puede mejorarse la información provista por los indicadores, es ampliando su cobertura, tanto sectorial como geográficamente. Si esto ocurre, se posibilita la aplicación de la metodología para realizar el análisis de coyuntura en otros sectores y/o regiones del país. Adicionalmente se presentaría la oportunidad de utilizar una metodología para series múltiples, que tenga en cuenta las relaciones contables de carácter contemporáneo entre sectores o regiones, es decir, la suma de los PIB's sectoriales o en su caso regiones, debe ser igual que el PIB total nacional.

Por último, conviene apreciar que la aplicación que se realizó para estimar la serie del PIB real mensual de Guatemala, puede también efectuarse para estimar el correspondiente PIB mensual a precios corrientes. Esta nueva aplicación requeriría esencialmente trabajar con el Deflactor Implícito del PIB y, una vez realizada la desagregación y el pronóstico de esta variable, se obtendría el PIB a precios corrientes mediante una simple división de los correspondientes valores de las series desagregadas. De igual forma podrían efectuarse aplicaciones a otras variables de la Contabilidad Nacional que, hasta el momento de realizar este trabajo, sólo se presentan de manera anual.

Apéndice. Regla de combinación básica

El siguiente resultado es tomado del artículo de Guerrero y Peña (2000). Su utilidad radica en que permite llevar a cabo la estimación de un vector Z, a partir de otros dos vectores de observaciones W y Y.

Regla de Combinación Básica. Supóngase que los dos vectores observados, W y Y, están relacionados con un vector aleatorio Z, mediante

$$\mathbf{W} = \mathrm{E}(\mathbf{Z}\,|\,\mathrm{V})$$

donde V es un conjunto de información bien definido y

$$\mathrm{Y} = \mathrm{CZ},$$

con C una matriz conocida, de rango completo. Sea S = Z - W el vector de errores en la estimación de Z mediante W y supóngase que

$$\mathrm{E}(\mathbf{S}\,|\,\mathrm{V}) = \mathbf{0},\ \mathrm{E}(\mathbf{ZS}'\,|\,\mathrm{V}) = 0 \text{ y } \mathrm{Cov}(\mathbf{S}\,|\,\mathrm{V}) = \Sigma_S,$$

con Σ_S una matriz positiva definida conocida. Entonces, el predictor lineal con ECM mínimo de Z, basado en W y Y, está dado por

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathrm{W} + \mathrm{A}(\mathrm{Y} - \mathrm{CW})$$

donde $\mathrm{A} = \Sigma_S \mathrm{C}'(\mathrm{C}\Sigma_S\mathrm{C}')^{-1}$.

Además, la matriz de ECM de los errores de predicción, está dada por $\mathrm{ECM}(\hat{\mathbf{Z}}) = (\mathrm{I} - \mathrm{AC})\Sigma_S$.

Anexo 1. Indice Mensual de la Actividad Económica
(IMAE, Base 1995=100)

Año	Mes	IMAE	Tasa anual
1993	Enero	95.33	
	Febrero	90.92	
	Marzo	95.61	
	Abril	82.02	
	Mayo	80.47	
	Junio	77.41	
	Julio	82.01	
	Agosto	83.97	
	Septiembre	91.75	
	Octubre	100.39	
	Noviembre	107.05	
	Diciembre	113.76	
1994	Enero	99.69	4.57
	Febrero	93.69	3.04
	Marzo	95.48	-0.14
	Abril	87.91	7.18
	Mayo	84.83	5.42
	Junio	81.02	4.66
	Julio	81.97	-0.05
	Agosto	85.99	2.40
	Septiembre	94.32	2.80
	Octubre	103.83	3.44
	Noviembre	114.73	7.17
	Diciembre	117.91	3.65
1995	Enero	106.27	6.60
	Febrero	101.43	8.26
	Marzo	101.54	6.35
	Abril	89.27	1.55
	Mayo	89.66	5.69
	Junio	85.27	5.24
	Julio	87.56	6.83
	Agosto	92.86	7.99
	Septiembre	96.67	2.49
	Octubre	113.65	9.46
	Noviembre	114.75	0.03
	Diciembre	121.07	2.68
1996	Enero	109.24	2.79
	Febrero	103.83	2.37
	Marzo	102.73	1.17
	Abril	90.45	1.32
	Mayo	87.22	-2.72
	Junio	85.96	0.82
	Julio	91.53	4.53
	Agosto	91.30	-1.68
	Septiembre	100.12	3.57
	Octubre	112.83	-0.73
	Noviembre	115.40	0.56
	Diciembre	128.64	6.25

Anexo 1 (Cont.) Indice Mensual de la Actividad Económica (IMAE, Base 1995=100)			
Año	**Mes**	**IMAE**	**Tasa anual**
1997	Enero	122.48	12.13
	Febrero	104.56	0.71
	Marzo	104.78	2.00
	Abril	95.64	5.74
	Mayo	93.36	7.04
	Junio	89.75	4.41
	Julio	93.32	1.96
	Agosto	97.52	6.82
	Septiembre	105.14	5.02
	Octubre	116.13	2.93
	Noviembre	124.52	7.90
	Diciembre	129.46	0.64
1998	Enero	119.47	-2.46
	Febrero	113.60	8.64
	Marzo	112.43	7.29
	Abril	106.17	11.01
	Mayo	98.97	6.01
	Junio	96.79	7.85
	Julio	99.96	7.11
	Agosto	99.73	2.26
	Septiembre	116.66	10.96
	Octubre	128.16	10.36
	Noviembre	126.95	1.95
	Diciembre	135.94	5.01
1999 p/	Enero	128.11	7.23
	Febrero	116.56	2.61
	Marzo	122.38	8.85
	Abril	106.11	-0.06
	Mayo	102.07	3.13
	Junio	97.46	0.69
	Julio	101.72	1.76
	Agosto	104.49	4.77
	Septiembre	118.96	1.97
	Octubre	133.34	4.04
	Noviembre	135.09	6.41

p/ Cifras preliminares

Fuente: Sección de Cuentas Nacionales, Banco de Guatemala

REFERENCIAS

Abeysinghe, T. y Lee, C. (1998) *Best linear unbiased disaggregation of annual GDP to quarterly figures: The case of Malaysia.* Journal of Forecasting, 17, 527 - 537.

Braun, S.N. (1990) *Estimation of current-quarter Gross National Product by pooling preliminary labor-market data.* Journal of Business and Economic Statistics, 8(2), 293 - 304.

Chen, Z.G., Cholette, P.A. y Dagum, E.B. (1997) *A nonparametric method for benchmarking survey data via signal extraction.* Journal of the American Statistical Association, 92, 1563 - 1571.

Chow, G.C. y Lin, A. (1971) *Best linear interpolation, distribution and extrapolation of time series by related series.* Review of Economics and Statistics, 53, 372 - 375.
Cohen, K.J., Müller, W. y Padberg, M.W. (1971) Autoregressive approaches to disaggregation of time series data. Applied Statistics, 20, 119 - 129.

Denton, F.T. (1971) *Adjustment of monthly or quarterly series to annual totals: an approach based on quadratic minimization.* Journal of the American Statistical Association, 66, 99 - 102.

Engel, E.M.R. (1984) *A unified approach to the study of sums, products, time-aggregation and other functions of ARMA processes.* Journal of Time Series Analysis, 5(3), 159 - 171.

Friedman, M. (1962) *The interpolation of time series by related series.* Journal of the American Statistical Association, 57, 729 - 757.

Guerrero, V.M. (1990) *Temporal disaggregation of time series. An ARIMA-based approach.* International Statistical Review, 58, 29 - 46.

Guerrero, V.M. (1991) *Análisis estadístico de series de tiempo económicas.* México: Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa.

Guerrero, V.M. y Martínez, J. (1995) *A recursive ARIMA-based procedure for disaggregating a time series variable using concurrent data.* Test, 4(2), 359 - 376.

Guerrero, V.M. y Peña, D. (2000) *Linear combination of restrictions and forecasts in time series analysis.* Journal of Forecasting, 19.

Hillmer, S.O. y Trabelsi, A. (1987) *Benchmarking of economic time series.* Journal of the American Statistical Association, 82, 1064 - 1071.

Judge, G.G., Griffiths, W.E., Hill, R.C. y Lee, T.C. (1980) The theory and practice of econometrics. New York: Wiley.

Lisman, J.H.C. y Sandee, J. (1964) *Derivation of quarterly figures from annual data.* Applied Statistics, 13, 87 - 90.

Nieto, F. (1998) *Ex-post and ex-ante prediction of unobserved economic time series: A case study.* Journal of Forecasting, 17, 35 - 58.

Valle, H. A. (1999) Comunicación personal. *Sección de Cuentas Nacionales, Depto. De Estadísticas Económicas.* Banco de Guatemala.

Wei, W.W.S. y Stram, D.D. (1990) *Disaggregation of time series models.* Journal of the Royal Statistical Society, B-52, 453 - 467.